Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 2 Gruppe B (DO, 20.06.2013) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Differentialgleichung des Problems

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{x}{2} y'^2 + yy' + 8\frac{y^2}{x} \right) \, dx \longrightarrow \min!$$

unter den Randbedingungen $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$ und der Nebenbedingung $\int_{-1}^{1} y(x) \, dx = \frac{16}{15}$ durch

$$x^2 y'' + xy' - 16y - \lambda x = 0$$

gegeben ist.

$h(x, y, y') = \frac{x}{2} y'^2 + yy' + 8\frac{y^2}{x} + \lambda y$
Die Euler-Langrage-Gleichung ist gegeben durch: $\frac{d}{dx}(\frac{\partial h}{\partial y'}) = \frac{\partial h}{\partial y}$

$$\begin{aligned} y' + 16\frac{y}{x} + \lambda &= xy'' + 2y' \\ \Leftrightarrow xy'' + y' - 16\frac{y}{x} - \lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 y'' + xy' - 16y - \lambda x &= 0 \end{aligned}$$

b) (4 Punkte) Lösen Sie das obige Variationsproblem. Um die Differentialgleichung zu lösen, verwenden Sie den Ansatz $y(x) = cx^n$ für die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und $y(x) = cx$ für die Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung.

Homogene Lösung: $x^2y'' + xy' - 16y = 0$ mittels Ansatz: $y = cx^n$

$$\begin{aligned} x^2cn(n-1)x^{n-2} + xncx^{n-1} - 16cx^n = 0 \\ \Leftrightarrow n^2 - 16 = 0 \\ \Leftrightarrow n_1 = 4, n_2 = -4 \end{aligned}$$

$y_h = c_1x^4 + c_2x^{-4}$

Inhomogene Lösung mittels Ansatz: $y = cx$

$$\begin{aligned} cx - 16cx - \lambda x = 0 \\ \Leftrightarrow c = -\frac{\lambda}{15} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung: $y = c_1x^4 + c_2x^{-4} - \frac{\lambda}{15}x$

Einsetzen in die Randbedingungen liefert uns:

$$\begin{aligned} y(-1) = 0 = c_1 + c_2 + \frac{\lambda}{15} \\ y(1) = 0 = c_1 + c_2 - \frac{\lambda}{15} \\ \Rightarrow \lambda = 0 \\ \Rightarrow c_1 = -c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \left(-c_2x^4 + c_2x^{-4}\right) dx &= \left[-\frac{c_2}{5}x^5 - \frac{c_2}{3}x^{-3}\right]_{-1}^{1} \\ &= -\frac{2c_2}{5} - \frac{2c_2}{3} = -\frac{16}{15}c_2 = \frac{16}{15} \\ &\Rightarrow c_2 = -1, c_1 = 1 \end{aligned}$$

Lösung: $y = x^4 - x^{-4}$

- **Aufgabe 2.** Sei

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n} g(x)(x - 4n)$$

wobei

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [-2, 2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für ein fixes $n \in \mathbb{N}$ $\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)| \, dx$ existiert.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{1}{2^n} g(x)(x-4n)| \, dx = \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^n} |g(x)(x-4n)| \, dx = \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^n} |g(x)||(x-4n)| \, dx = \\
&\frac{1}{2^n} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)||(x-4n)| \, dx \\
\Rightarrow &\frac{1}{2^n} \int_{-2}^{2} |(x-4n)| \, dx \\
\text{da } x \in [-2,2] \text{ und } n \geq 1 \Rightarrow &(x-4n) < 0 \Rightarrow |(x-4n)| = (4n - x) \\
\Rightarrow &\frac{1}{2^n} \left[4nx - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{2} = \\
&\frac{1}{2^n} \left[4n2 - \frac{2^2}{2} - \left(4n(-2) - \frac{(-2)^2}{2} \right) \right] = \\
&\frac{1}{2^n} 16n \\
\Rightarrow &\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)| \, dx \ < \ \infty, \ \forall \ n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformation von f_n.

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_n(k) = &\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) e^{-ikx}\ dx = \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^n} g(x)(x-4n) e^{-ikx}\ dx = \\
&\frac{1}{2^n} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)(x-4n) e^{-ikx}\ dx = \\
\Rightarrow &\frac{1}{2^n} \int_{-2}^{2} (x-4n) e^{-itx}\ dx = \\
&\frac{1}{2^n} \left(\int_{-2}^{2} x e^{-ikx} - \int_{-2}^{2} 4n e^{-ikx}\ dx \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow &- \int_{-2}^{2} 4n e^{-ikx}\ dx = - \left[\frac{4ne^{-ikx}}{-ik} \right]_{-2}^{2} = \\
&- \frac{4ne^{-ik2}}{-ik} + \frac{4ne^{ik2}}{-ik} = \frac{4n}{ik} \left(e^{-ik2} - e^{ik2} \right) = \\
&\frac{4n}{ik} \left(-2i \sin(2k) \right) = -\frac{8n}{k} \sin(2k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow &\int_{-2}^{2} x e^{-ikx} = \left[-\frac{xe^{-ikx}}{ik} \right]_{-2}^{2} + \left[\frac{e^{-ikx}}{k^2} \right]_{-2}^{2} = \\
&- \frac{1}{ik} \left(2e^{-ik2} + 2e^{ik2} + \right) + \frac{1}{k^2} \left(e^{-ik2} - e^{ik2} \right) = \\
&- \frac{1}{ik} \left(4 \cos(2k) \right) + \frac{1}{k^2} \left(-2i \sin(2k) \right) = \\
&\frac{4i}{k} \cos(2k) - \frac{2i}{k^2} \sin(2k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Lösung: } \hat{f}_n(k) = &\frac{1}{2^n} \left(\frac{4i}{k} \cos(2k) - \frac{2i}{k^2} \sin(2k) - \frac{8n}{k} \sin(2k) \right) = \\
&\frac{1}{2^n k^2} \left(4ik \cos(2k) - 2i \sin(2k) - 8nk \sin(2k) \right)
\end{aligned}
$$

- **Aufgabe 3.**(6 Punkte)

Man bestimme mit Hilfe der Fouriertransformation die Lösung des Anfangswertproblems für $u = u(x,t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2\frac{\partial u}{\partial x}, t > 0, -\infty < 0 < \infty,$$
$$u(x,0) = e^{-|x|}.$$

Hinweis: Es gilt zu beachten: $u(\sigma(t,x),t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u(k,t)} e^{ik\sigma(t,x)}$

Das transformierte Problem für $\hat{u} = \hat{u}(k,t)$ lautet:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -2(ik)\hat{u} \text{ (siehe 4.27)}$$

Somit folgt die Lösung für die gewöhliche Differentialgleichung:

$$\hat{u}(k,t) = c(k)e^{-2ikt}$$

Es muss nun der Term $c(k)$ berechnet werden

$$\begin{aligned} c(k) = \hat{u}(k,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-ikx}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-ikx}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-ikx}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-ikx}\,dx \\ &= \frac{2}{1+k^2} \end{aligned}$$

Damit gilt $\hat{u}(k,t) = \frac{2}{1-k^2}e^{-2ikt}$. Dies muss nun zurücktransformiert werden (Hinweis).

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+k^2}e^{-2ikt}e^{ikx}\,dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+k^2}e^{ik(-2t+x)}\,dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+k^2}e^{ik\sigma(t,x)}\,dk \\ &= e^{-|\sigma(t,x)|} \\ &= e^{-|-2t+x|} \end{aligned}$$