Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

P R A K T I S C H E   M A T H E M A T I K   I I   F Ü R   T P H,   (103.058)

Test 2 Gruppe A (DO, 20.06.2013) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

• **Aufgabe 1.** Sei

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n} g(x)(x - 8n)$$

wobei

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [-6, 6] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für ein fixes $n \in \mathbb{N}$ $\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|\, dx$ existiert.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{1}{2^n} g(x)(x - 8n)|\ dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^n} |g(x)(x - 8n)|\ dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^n} |g(x)||(x - 8n)|\ dx =$$

$$\frac{1}{2^n} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)||(x - 8n)|\ dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} \int_{-6}^{6} |(x - 8n)|\ dx =$$

$$\text{da } x \in [-6, 6] \text{ und } n \geq 1 \Rightarrow (x - 8n) < 0 \Rightarrow |(x - 8n)| = (8n - x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} \left[8nx - \frac{x^2}{2} \right]_{-6}^{6} =$$

$$\frac{1}{2^n} \left[8n6 - \frac{2^2}{6} - \left(4n(-6) - \frac{(-6)^2}{2} \right) \right] =$$

$$\frac{1}{2^n} 96n$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|\ dx\ <\ \infty,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformation von f_n.

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_n(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)e^{-ikx}\ dx = \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^n} g(x)(x-8n)e^{-ikx}\ dx = \\
&\frac{1}{2^n}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)(x-8n)e^{-ikx}\ dx = \\
\Rightarrow &\frac{1}{2^n}\int_{-6}^{6} (x-8n)e^{-itx}\ dx = \\
&\frac{1}{2^n}\left(\int_{-6}^{6} xe^{-ikx} - \int_{-2}^{2} 8ne^{-ikx}\ dx\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow &-\int_{-6}^{6} 8ne^{-ikx}\ dx = -\left[\frac{8ne^{-ikx}}{-ik}\right]_{-6}^{6} = \\
&-\frac{8ne^{-ik6}}{-ik} + \frac{8ne^{ik6}}{-ik} = \frac{8n}{ik}\left(e^{-ik6} - e^{ik6}\right) = \\
&\frac{8n}{ik}\left(-2i\sin(6k)\right) = -\frac{16n}{k}\sin(6k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow &\int_{-6}^{6} xe^{-ikx} = \left[-\frac{xe^{-ikx}}{ik}\right]_{-6}^{6} + \left[\frac{e^{-ikx}}{k^2}\right]_{-6}^{6} = \\
&-\frac{1}{ik}\left(6e^{-ik6} + 6e^{ik6} +\right) + \frac{1}{k^2}\left(e^{-ik6} - e^{ik6}\right) = \\
&-\frac{1}{ik}\left(12\cos(6k)\right) + \frac{1}{k^2}\left(-2i\sin(6k)\right) = \\
&\frac{12i}{k}\cos(6k) - \frac{2i}{k^2}\sin(6k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Lösung: } \hat{f}_n(k) =&\frac{1}{2^n}\left(\frac{12i}{k}\cos(6k) - \frac{2i}{k^2}\sin(6k) - \frac{16n}{k}\sin(6k)\right) = \\
&\frac{1}{2^n k^2}\left(12ik\cos(6k) - 2i\sin(6k) - 16nk\sin(6k)\right)
\end{aligned}
$$

• **Aufgabe 2.**(6 Punkte)
Man bestimme mit Hilfe der Fouriertransformation die Lösung des Anfangswertproblems für $u = u(x,t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -4\frac{\partial u}{\partial x}, t > 0, -\infty < 0 < \infty,$$
$$u(x,0) = e^{-|x|}.$$

Hinweis: Es gilt zu beachten: $u(\sigma(t,x),t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u(k,t)} e^{ik\sigma(t,x)}$

Das transformierte Problem für $\hat{u} = \hat{u}(k,t)$ lautet:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -4(ik)\hat{u} \text{ (siehe 4.27)}$$

Somit folgt die Lösung für die gewöhliche Differentialgleichung:

$$\hat{u}(k,t) = c(k)e^{-4ikt}$$

Es muss nun der Term $c(k)$ berechnet werden

$$\begin{aligned} c(k) = \hat{u}(k,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-ikx}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-ikx}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-ikx}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-ikx}\,dx \\ &= \frac{2}{1+k^2} \end{aligned}$$

Damit gilt $\hat{u}(k,t) = \frac{2}{1-k^2}e^{-4ikt}$. Dies muss nun zurücktransformiert werden (Hinweis).

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+k^2}e^{-4ikt}e^{ikx}\,dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+k^2}e^{ik(-4t+x)}\,dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+k^2}e^{ik\sigma(t,x)}\,dk \\ &= e^{-|\sigma(t,x)|} \\ &= e^{-|-4t+x|} \end{aligned}$$

- **Aufgabe 3.**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Differentialgleichung des Problems

$$\int_{-2}^{2} \left(\frac{x}{2} y'^2 + yy' + 2\frac{y^2}{x} \right) \, dx \longrightarrow \text{min!}$$

unter den Randbedingungen $y(-2) = 0$, $y(2) = 0$ und der Nebenbedingung $\int_{-2}^{2} y(x) \, dx = \frac{4}{3}$ durch

$$x^2 y'' + xy' - 4y - \lambda x = 0$$

gegeben ist.

$h(x, y, y') = \frac{x}{2} y'^2 + yy' + 2\frac{y^2}{x} + \lambda y$
Die Euler-Langrage-Gleichung ist gegeben durch: $\frac{d}{dx}(\frac{\partial h}{\partial y'}) = \frac{\partial h}{\partial y}$

$$\begin{aligned} y' + 4\frac{y}{x} + \lambda &= xy'' + 2y' \\ \Leftrightarrow xy'' + y' - 4\frac{y}{x} - \lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 y'' + xy' - 4y - \lambda x &= 0 \end{aligned}$$

b) (4 Punkte) Lösen Sie das obige Variationsproblem. Um die Differentialgleichung zu lösen, verwenden Sie den Ansatz $y(x) = cx^n$ für die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und $y(x) = cx$ für die Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung.

Homogene Lösung: $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ mittels Ansatz: $y = cx^n$

$$\begin{aligned} x^2cn(n-1)x^{n-2} + xncx^{n-1} - 4cx^n &= 0 \\ \Leftrightarrow n^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow n_1 = 2, n_2 &= -2 \end{aligned}$$

$y_h = c_1x^2 + c_2x^{-2}$

Inhomogene Lösung mittels Ansatz: $y = cx$

$$\begin{aligned} cx - 4cx - \lambda x &= 0 \\ \Leftrightarrow c &= -\frac{\lambda}{3} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung: $y = c_1x^2 + c_2x^{-2} - \frac{\lambda}{3}x$

Einsetzen in die Randbedingungen liefert uns:

$$\begin{aligned} y(-2) = 0 &= 4c_1 + \frac{c_2}{4} + \frac{2\lambda}{3} \\ y(2) = 0 &= 4c_1 + \frac{c_2}{4} - \frac{2\lambda}{3} \\ \Rightarrow \lambda &= 0 \\ \Rightarrow c_1 &= -\frac{c_2}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} \left(-\frac{c_2}{16}x^2 + c_2x^{-2}\right) dx &= \left[-\frac{c_2}{48}x^3 - c_2x^{-1}\right]_{-2}^{2} \\ &= -\frac{c_2}{3} - c_2 = -\frac{4}{3}c_2 = \frac{4}{3} \\ &\Rightarrow c_2 = -1, c_1 = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Lösung: $y = \frac{1}{16}x^2 - x^{-2}$