

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 1 Gruppe A (FR, 3.05.2013) (mit Lösung)

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

• **Aufgabe 1.**

a) (2 Punkte) Sei $F := \{\mathbf{r}(x, y) \mid x \in (a, 4), y \in (0, \pi), a \in \mathbb{R}\}$, mit

$$\mathbf{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \cos(y) \\ x^2 \\ x \sin(y) \end{pmatrix}.$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ handelt es sich bei F um eine reguläre Fläche.

Es ist zu zeigen, dass F eine reguläre Fläche ist. $\mathbf{r}(x, y)$ ist als Zusammensetzung von stetig differenzierbaren Funktionen, stetig differenzierbar. Die Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(y) \\ 2x \\ \sin(y) \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} -x \sin(y) \\ 0 \\ x \cos(y) \end{pmatrix}$$

sind für alle $x \neq 0$ linear unabhängig. Somit handelt es sich für alle $a \in [0, 4)$ um eine reguläre Fläche.

(2 Punkte) Weiters berechnen Sie den Flächeninhalt von F mittels eines Maßensors und nehmen Sie $a = 2$ an.

Hinweis: Substituieren Sie mit $u = x^2$

Der Maßtensor ist gegeben durch:

$$M(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^2 + 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}.$$

Der Flächeninhalt wird wie folgt berechnet:

$$\int_G dS := \int_{[2,4] \times [0,\pi]} \sqrt{\det M(x, y)} d(x, y) = \int_2^4 \int_0^\pi \sqrt{x^2(4x^2 + 1)} dy dx = \pi \int_2^4 x \sqrt{4x^2 + 1} dx$$

(Hinweis: $u = x^2, \frac{du}{dx} = 2x$) $= \frac{\pi}{2} \int_4^{16} \sqrt{4u + 1} du = \left[\frac{\pi}{12} (4u + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_4^{16} = \frac{\pi}{12} (65^{\frac{3}{2}} - 17^{\frac{3}{2}})$

- b) (2 Punkte) Berechnen Sie $\mathbf{a}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v)$, wobei $\mathbf{a}(x, y, z) = (y, x, e^z)^T$ und $F := \{\mathbf{r}(u, v) \mid u \in (0, R), v \in (0, 2\pi), R \in \mathbb{R}^+\}$, mit

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos(v) \\ u \sin(v) \\ 2(1 - \frac{u}{R}) \end{pmatrix}.$$

Für $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ erhalten wir:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}(u, v)) = \begin{pmatrix} u \sin(v) \\ u \cos(v) \\ e^{2(1 - \frac{u}{R})} \end{pmatrix}.$$

Der Normalvektor ist gegeben durch:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ -\frac{2}{R} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin(v) \\ u \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{R}u \cos(v) \\ \frac{2}{R}u \sin(v) \\ u \end{pmatrix}.$$

Somit können wir $\mathbf{a}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v)$ berechnen und erhalten,

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) = \frac{4}{R}u^2 \sin(v) \cos(v) + ue^{2(1 - \frac{u}{R})} \quad (1)$$

1 Zusatzpunkt: Berechnen Sie $\int_{[0, R] \times [0, 2\pi]} \mathbf{a}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) d(u, v)$.
 Hinweis: $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$

Um das Integral vom obigen Ausdruck (1) zu berechnen, sieht man anhand des Hinweises, dass der erste Summand nach v integriert, Null ergibt.

$$\int_{[0, R]} \int_{[0, 2\pi]} \frac{4}{R}u^2 \sin(v) \cos(v) dv du = \int_{[0, R]} \int_{[0, 2\pi]} \frac{2}{R}u^2 \sin(2v) dv du = \int_{[0, R]} -\frac{2}{R}u^2 (\cos(4\pi) - \cos(0)) du = 0$$

Beim zweiten Summanden muss einmal partiell integriert werden und wir erhalten,

$$\int_{[0, R] \times [0, 2\pi]} \mathbf{a}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) d(u, v) = \int_{[0, R]} \int_{[0, 2\pi]} ue^{2(1 - \frac{u}{R})} dv du = 2\pi \int_{[0, R]} ue^{2(1 - \frac{u}{R})} du = \left[-2\pi u R \frac{e^{2(1 - \frac{u}{R})}}{2} \right]_0^R + 2\pi R \int_{[0, R]} \frac{e^{2(1 - \frac{u}{R})}}{2} du = -\pi R^2 - 2\pi R^2 \left[\frac{e^{2(1 - \frac{u}{R})}}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^2}{2} (e^2 - 3)$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben ist folgendes Vektorfeld **a**:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -y^2 z^3 \sin(x) + 3x^2 y^2 \sin(z) \\ 2y z^3 \cos(x) + 2x^3 y \sin(z) \\ 3y^2 z^2 \cos(x) + x^3 y^2 \cos(z) \end{pmatrix}.$$

- a) (3 Punkte) Berechnen Sie $\nabla \times \mathbf{a}$ und geben Sie das größte Gebiet an, auf dem **a** wirbelfrei ist. Zeigen Sie, dass ein Potenzial existiert.

$\nabla \times \mathbf{a}$ wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6yz^2 \cos(x) + 2x^3 y \cos(z) - 6yz^2 \cos(x) - 2x^3 y \cos(z) \\ -3y^2 z^2 \sin(x) + 3x^2 y^2 \cos(z) + 3y^2 z^2 \sin(x) - 3x^2 y^2 \cos(z) \\ -2yz^3 \sin(x) + 6x^2 y \sin(z) + 2yz^3 \sin(x) - 6x^2 y \sin(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a ist im ganzen Raum \mathbb{R}^3 definiert. Zudem ist \mathbb{R}^3 einfach zusammenhängend und damit existiert das Potential. Somit erhalten wir mit \mathbb{R}^3 das größte Gebiet auf dem **a** wirbelfrei ist.

- b) (3 Punkte) Bestimmen Sie zum obigen Vektorfeld **a** ein Potential.

Das Potential wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \phi &= -y^\alpha z^\beta \sin(x) + ax^{a-1} y^b \sin(z) \\ \Rightarrow \phi &= y^\alpha z^\beta \cos(x) + x^a y^b \sin(z) + d(y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \phi &= \alpha y^{\alpha-1} z^\beta \cos(x) + bx^a y^{b-1} \sin(z) + \frac{\partial}{\partial y} d(y, z) \\ \Rightarrow \phi &= y^\alpha z^\beta \cos(x) + x^a y^b \sin(z) + d(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \phi &= \beta y^\alpha z^{\beta-1} \cos(x) + x^a y^b \cos(z) + \frac{\partial}{\partial z} d(z) \\ \Rightarrow \phi &= y^\alpha z^\beta \cos(x) + x^a y^b \sin(z) + d \end{aligned}$$

Setzen Sie für $\alpha = 2, \beta = 3, a = 3, b = 2$ ein.

- **Aufgabe 3.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, wie folgt gegeben:

$$G := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x \in (0, 1), y \in (0, f(x, z)), z \in (0, 1) \right\}, \text{ mit } f(x, z) = (1 - z)\sqrt{1 - x^2}$$

- a) (3 Punkte) Begründen Sie warum G eine offene Menge ist und zeigen Sie, dass G beschränkt ist, indem Sie einen möglichst kleinen Quader finden, in dem G zur Gänze liegt.

G ist offen \Leftrightarrow Menge besteht nur aus inneren Punkten \Leftrightarrow
 $\forall r_0 \in G \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(r_0) \subset G$. Mit $\epsilon = \min(\{r \in \partial G : \|r - r_0\|\})$ ist diese Bedingung erfüllt.

$f(x, z)$ ist stetig und monoton für $x \in (0, 1)$ und $z \in (0, 1)$. Es gilt $\max(f(x, z)) = 1$. Somit folgt $0 < f(x, z) < 1$. Weiters ist $0 < x < 1$ und $0 < z < 1$. Aus den Eigenschaften folgt, dass der kleinste Quader folgende Punkte als Eckpunkte hat (Vgl. Abb. 1).

$$(0, 0, 0)^T, (1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 1, 1)^T$$

- b) (3 Punkte) Berechnen Sie das Flächenintegral (siehe Skizze in der $f(x, z)$ auf dem Gebiet $(x, z) \in (0, 1) \times (0, 1)$ dargestellt ist),

$$\int_{\partial G} g \cdot d\mathbf{S}$$

mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes, wobei $g(x, y, z)^T = (\sqrt{1 - x^2}, xz - x - x^2, -\sqrt{1 - x^2})^T$.

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} g \cdot d\mathbf{S} &= \int_G \nabla \cdot g \, dV = \int_G -(1 - x^2)^{-1/2} x \, dV = - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{f(x,z)} (1 - x^2)^{-1/2} x \, dy dz dx = \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 [(1 - x^2)^{-1/2} xy]_0^{f(x,z)} dz dx = - \int_0^1 \int_0^1 (1 - x^2)^{-1/2} x (1 - z) (1 - x^2)^{1/2} dz dx = \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 x (1 - z) dz dx = - \int_0^1 \int_0^1 (x - xz) dz dx = - \int_0^1 \left[xz - x \frac{z^2}{2} \right]_0^1 dx = - \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \\ &= \left[-\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

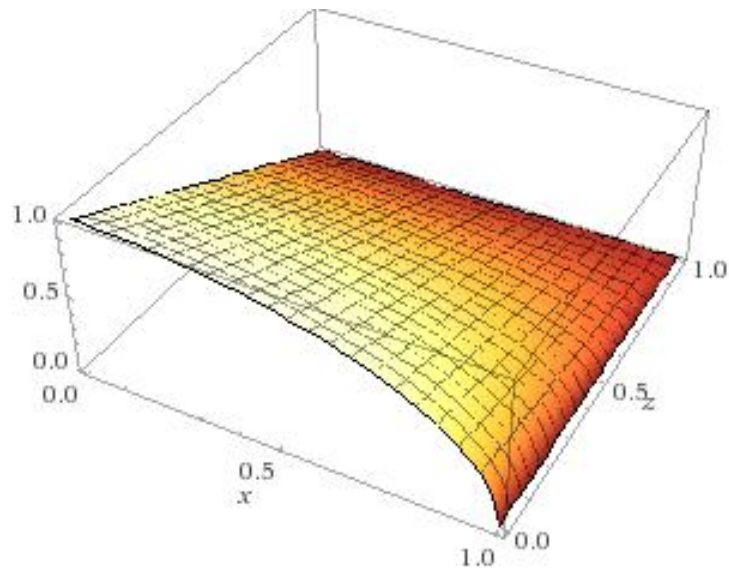


Abbildung 1: Skizze von G

1 Zusatzpunkt: Bestimmen Sie den Rand von G , (∂G) . Sind alle Teilflächen des Randes orientierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\partial G_1 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x \in (0, 1), y = 0, z \in (0, 1)\}$$

$$\partial G_2 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y \in (0, f(x, z)), z \in (0, 1)\},$$

$$\partial G_3 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x \in (0, 1), y = f(x, z), z \in (0, 1)\},$$

$$\partial G_4 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x \in (0, 1), y \in (0, f(x, z)), z = 0\}$$

$\Rightarrow \partial G_1 \cup \partial G_2 \cup \partial G_3 \cup \partial G_4$ ist für den Satz von Gauß ausreichend, da der Rand aus endlich vielen, stückweise regulären, orientierbaren Flächen bestehen muss.

Definition der orientierbaren Fläche: Längs jeder geschlossenen Flächenkurve zeigt der Normalvektor der Fläche nach einem Umlauf um die Kurve in dieselbe Richtung wie zuvor. Es reicht zu zeigen, dass der Normalvektor auf jedem Teilstück des Randes stetig ist; damit zeigt der Normalvektor auf die Fläche nach einem Umlauf auf einer geschlossenen Flächenkurve in dieselbe Richtung.

$$\partial G_1 : n(x, z) = (0, -1, 0)^T \xrightarrow{\text{stetig } \forall (x,z) \in \partial G_1} \text{orientierbar}$$

$$\partial G_2 : n(y, z) = (-1, 0, 0)^T \xrightarrow{\text{stetig } \forall (y,z) \in \partial G_2} \text{orientierbar}$$

∂G_3 : Parameterdarstellung der Fläche

$$r(x, z) = (x, (1-z)\sqrt{1-x^2}, z)^T \Rightarrow n(x, z) = \left(-\frac{(1-z)x}{\sqrt{1-x^2}}, -1, -\sqrt{1-x^2}\right)^T \xrightarrow{\text{stetig für } (x,z) \in \partial G_3} \text{orientierbar}$$

$$\partial G_4 : n(x, y) = (0, 0, -1)^T \xrightarrow{\text{stetig } \forall (x,y) \in \partial G_4} \text{orientierbar}$$