Institut für Analysis und Scientific Computing
O. Koch

WS 2012/13

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

2. Haupttest (18. Jänner 2013)

Gruppe weiß *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

—— *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* ——

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 30)*		

Aufgabe 1.

Hyperbolische Koordinaten sind im 1. Quadranten durch die Transformation

$$\begin{aligned} x(u,v) &= ve^{u} \\ y(u,v) &= ve^{-u} \end{aligned}$$

definiert, wobei $v > 0$.

a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante für diese Koordinatentransformation.

Berechnen Sie, wie durch die folgende Anleitung gegeben, die Größe

$$I = \int_A \frac{1}{xy}\, dx\, dy,$$

wobei A die zwischen den Kurven

$$C_1 : y = x, \quad C_2 : y = e^2 x, \quad C_3 : y = \frac{1}{x}, \quad C_4 : y = \frac{4}{x}$$

eingeschlossene Fläche ist.

b) Skizzieren Sie den Integrationsbereich.

c) Transformieren Sie die Kurven, die die Fläche begrenzen, in die neuen Koordinaten. Setzen Sie dazu die Transformationen in die Kurvengleichungen ein und zeigen Sie, dass letztere die Form $u = const$ bzw. $v = const$ annehmen.

d) Berechnen Sie I mithilfe der gegebenen Koordinatentransformation.

LÖSUNG

a) Die Funktionaldeterminante lautet

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} ve^{u} & e^{u} \\ -ve^{-u} & e^{-u} \end{pmatrix} = 2v.$$

b) Skizze

c) Durch Einsetzen der Transformation ergibt sich

$$\begin{aligned} y = x \quad &\rightarrow \quad ve^{-u} = ve^{u} \\ & \qquad u = 0, \\[1em] y = e^2 x \quad &\rightarrow \quad ve^{-u} = e^2 ve^{u} \\ & \qquad u = -1, \\[1em] y = \frac{1}{x} \quad &\rightarrow \quad ve^{-u} = \frac{1}{ve^{u}} \\ & \qquad v = 1, \\[1em] y = \frac{4}{x} \quad &\rightarrow \quad ve^{-u} = \frac{2}{ve^{u}} \\ & \qquad v = 2. \end{aligned}$$

d) Der Integrand in neuen Koordinaten lautet

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{ve^u ve^{-u}} = \frac{1}{v^2}.$$

Dann ist

$$I = \int_{u=-1}^{0} \int_{v=1}^{2} \underbrace{2v}_{FD} \frac{1}{v^2}\, dv\, du = 2\ln(2).$$

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie die Lösung(en) $y(x)$ für die Differentialgleichung

$$y' = -6x^2\sqrt{y}(1-\sqrt{y}).$$

Hinweis: $\int \frac{1}{\sqrt{y}-y}\,dy = -2\ln(1-\sqrt{y}) + C$.

b) Berechnen Sie

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}-y}\,dy$$

durch geeignete Substitution.

LÖSUNG

a) Die Differentialgleichung ist mithilfe der Separation der Variablen lösbar:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -6x^2\sqrt{y}(1-\sqrt{y}) \\
\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{y}(1-\sqrt{y})}\,dy}_{\text{Hinweis}} &= -6\int x^2\,dx \\
-2\ln(1-\sqrt{y}) + C &= -2x^3 \\
\ln(1-\sqrt{y}) &= x^3 + \frac{C}{2} \\
1-\sqrt{y} &= \tilde{C}e^{x^3} \\
y &= (1-\tilde{C}e^{x^3})^2.
\end{aligned}$$

b) Das Integral kann durch Substitution gelöst werden:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{y}-y}\,dy &= \int \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{1}{1-\sqrt{y}}\,dy = \left|\begin{matrix} u &=& 1-\sqrt{y} \\ du &=& -\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy \end{matrix}\right| \\
&= -2\int \frac{1}{u}\,du = -2\ln u + C = -2\ln(1-\sqrt{y}) + C
\end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{y}-y}\,dy &= \left|\begin{matrix} u &=& \sqrt{y} \\ du &=& \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{2u}\,dy \end{matrix}\right| = 2\int \frac{u}{u-u^2}\,du \\
&= 2\int \frac{1}{1-u}\,du = -2\ln(1-u) + C = -2\ln(1-\sqrt{y}) + C
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.

Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$y'' - \frac{x}{1+\frac{x^2}{2}}y' + \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}y = (4-x^4), \quad x > 1. \tag{1}$$

a) Stellen Sie sicher, dass $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2 - 2$ Lösungen der homogenen DGL sind.

b) Zeigen Sie, dass $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem der DGL ist.

c) Bestimmen Sie mittels Variation der Konstanten die allgemeine Lösung der DGL.

LÖSUNG

a) $y_1'(x) = 1$, $y_1''(x) = 0$
$y_2'(x) = 2x$, $y_2''(x) = 2$

$$y_1 : 0 - \frac{x}{1+\frac{x^2}{2}}1 + \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}x = 0,$$

$$y_2 : 2 - \frac{x}{1+\frac{x^2}{2}}2x + \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}(x^2-2) = \frac{2+x^2-2x^2+x^2-2}{1+\frac{x^2}{2}} = 0.$$

b)

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} x & x^2-2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 + 2 = x^2 + 2 \neq 0 \quad \forall x.$$

Nach Satz 5.4 muss $W[y_1, y_2] \neq 0$ sogar nur für ein x gelten, also ist $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem.

c) Der Ansatz für die Variation der Konstanten ist: $y(x) = c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$. Daraus resultieren die Gleichungen

$$I : xc_1' + (x^2-2)c_2' = 0,$$
$$II : 1c_1' + 2xc_2' = 4 - x^4.$$

Drückt man c_1' in der Gleichung I aus und setzt es in Gleichung II ein, erhält man

$$\frac{2-x^2}{x}c_2' + 2xc_2' = 4 - x^4 \Rightarrow \frac{x^2+2}{x}c_2' = 4 - x^4 \Rightarrow c_2' = \frac{x(2+x^2)(2-x^2)}{x^2+2}$$

$$c_2' = x(2-x^2) = 2x - x^3 \Rightarrow c_2 = x^2 - \frac{1}{4}x^4.$$

Für c_1 ergibt sich durch Einsetzen in die erste Gleichung

$$xc_1' + (x^2-2)x(2-x^2) = 0 \Rightarrow c_1' = -(x^2-2)(2-x^2) = x^4 - 4x^2 + 4 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x.$$

Damit ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = \frac{1}{5}x^6 - \frac{4}{3}x^4 + 4x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)(x^2-2) + d_1x + d_2(x^2-2).$$