Institut für Analysis und Scientific Computing
O. Koch

WS 2012/13

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

1. Haupttest (14. Dezember 2012)

Gruppe weiß *(mit Lösung)*

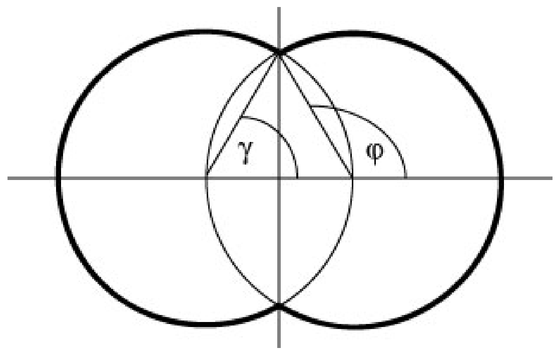
↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

—— kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet ——

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 30)*		

Aufgabe 1.

a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der gegen den Uhrzeigersinn laufenden Kurve $r(t)$, die im Bild durch die dicke Linie angegeben ist. Dabei sei der Radius beider Kreise gleich $r = 4$, sowie die Mittelpunkte gleich $M_1 = (2, 0)$ und $M_2 = (-2, 0)$. (Achten Sie darauf dass, falls die Parameterintervalle sich überschneiden, eines der Intervalle verschoben werden muss.)



Hinweis: Beachten Sie, dass γ ein Winkel in einem gleichseitigen Dreieck ist und $\varphi = \pi - \gamma$, sowie $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $F = \nabla T$ mit

$$T(x, y) = x^3 + 2y$$

entlang der Strecke von $a = (1, 0)$ nach $b = (3, -3)$.

c) Berechnen Sie

$$\int \cos x \sin x \, dx$$

sowohl mit partieller Integration als auch mit der Substitutionsmethode der Integration. Argumentieren Sie anhand des Ergebnisses, warum in diesem Spezialfall beide Methoden funktionieren.

LÖSUNG

a) $K_1 = (4\cos\varphi + 2, 4\sin\varphi),\ \ \varphi \in (\frac{-2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$
$K_2 = (4\cos\gamma - 2, 4\sin\gamma),\ \ \gamma \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$

Die Intervalle von φ und γ überschneiden sich noch. Verschieben des zweiten Intervalls um $\frac{\pi}{3}$ ergibt

$$r(t) = \begin{cases} (4\cos t + 2, 4\sin t), & t \in \left(\dfrac{-2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right) \\ \left(4\cos\left(t - \dfrac{\pi}{3}\right) - 2, 4\sin\left(t - \dfrac{\pi}{3}\right)\right), & t \in \left(\dfrac{2\pi}{3}, 2\pi\right) \end{cases}.$$

b) Da es sich bei F um ein Gradientenfeld handelt ist das Kurvenintegral

$$\int_C F dr = T(b) - T(a) = 3^3 + 2(-3) - 1^3 = 27 - 6 - 1 = 20.$$

Die direkte Berechnung des Kurvenintegrals ist etwas komplexer.

Aufstellen einer Parameterdarstellung des Weges: $r(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in (0, 1)$

$F = \nabla T = (3x^2,\ 2)$

$$\begin{aligned} \int_C F dr &= \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t)\ dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 3(1+2t)^2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\ dt = \\ &= \int_0^1 (6(1+4t+4t^2) - 6)\ dt = \int_0^1 (24t + 24t^2)\ dt = \\ &= 12t^2 + 8t^3 \Big|_0^1 = 12 + 8 = 20. \end{aligned}$$

c) Mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\sin x}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'}\, dx &= \underbrace{\sin x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{\cos x}_{u'} \underbrace{\sin x}_{v}\, dx \\ 2 \int \sin x \cos x\, dx &= \sin x \sin x \\ \int \sin x \cos x\, dx &= \frac{1}{2} \sin^2 x. \end{aligned}$$

Mit Substitutionsmethode:

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x\, dx &= \left| \begin{matrix} u = \sin x \\ du = \cos x\, dx \end{matrix} \right| = \int u \cos x \frac{du}{\cos x} \\ &= \int u\, du = \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2} \sin^2 x. \end{aligned}$$

Es funktionieren beide Integrationsmethoden, da sich die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x$ ebenfalls sowohl mit Kettenregel (als Potenz) als auch mit Produktregel (als Produkt) ableiten lässt. Kettenregel:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x \\ F(x) &= \frac{1}{2} u(x)^2 \\ F'(x) &= \frac{1}{2} 2u(x)u'(x) = \sin x \cos x \end{aligned}$$

Produktregel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ g(x) &= \sin x \\ F(x) &= \frac{1}{2} f(x)g(x) \\ F'(x) &= \frac{1}{2}(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) = \frac{1}{2}(\cos x \sin x + \sin x \cos x) \\ &= \sin x \cos x \end{aligned}$$

Aufgabe 2.

a) Berechnen Sie

$$\int_C \frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{-x}{x^2+y^2}\,dy$$

wobei $C = \{r(t) = (\cos t, \sin t),\ 0 \le t \le 2\pi\}$.
Begründen Sie aufgrund des Ergebnisses, ob das verwendete Vektorfeld ein Gradientenfeld ist.

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt S des Drahtstückes mit der Parameterdarstellung $r(t) = (t, 4\sqrt{t}, 2\ln t)$ $a \le t \le b$ und der Massendichte $\rho(x,y,z) = 3xe^{\frac{z}{2}}$ in Abhängigkeit von a und b. (Sie müssen nach Berechnung des Integrals nicht die Grenzen explizit einsetzen; es reicht, wenn Sie nach dem unbestimmten Integral $|_a^b$ schreiben.)

Hinweis: $S = \frac{\int_a^b \rho(r(t))|r'(t)|r(t)\,dt}{\int_a^b \rho(r(t))|r'(t)|\,dt}$. *Beachten Sie außerdem, dass* $|r'(t)|^2$ *ein vollständiges Quadrat ergibt.*

LÖSUNG

a)

$$\begin{aligned}\int_C \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{-x}{x^2+y^2}dy &= \int_0^{2\pi} F(r(t))\cdot r'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 t+\cos^2 t}\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-(\sin^2 t+\cos^2 t)}{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} -1\,dt = -t\,\Big|_0^{2\pi} = -2\pi.\end{aligned}$$

Das Vektorfeld ist kein Gradientenfeld, da das Integral über eine geschlossene Kurve nicht null ist.

b) $r'(t) = (1, 2\frac{1}{\sqrt{t}}, 2\frac{1}{t})$, $\quad |r'(t)|^2 = 1 + \frac{4}{t} + \frac{4}{t^2} = (1+\frac{2}{t})^2$, $\quad |r'(t)| = (1+\frac{2}{t})$

Berechnung des Nenners:

$$\int_a^b \left(1+\frac{2}{t}\right)3t^2\,dt = \int_a^b (3t^2+6t)\,dt = (t^3+3t^2)\Big|_a^b$$

Berechnung der einzelnen Komponenten des Zählers:

$$x = \int_a^b (3t^2+6t)t\,dt = \int_a^b (3t^3+6t^2)\,dt = \left(\frac{3}{4}t^4+2t^3\right)\Big|_a^b$$

$$y = \int_a^b (3t^2+6t)4\sqrt{t}\,dt = \int_a^b (12\sqrt{t^5}+24\sqrt{t^3})\,dt = \left(12\cdot\frac{2}{7}\sqrt{t^7}+24\cdot\frac{2}{5}\sqrt{t^5}\right)\Big|_a^b$$

$$z = \int_a^b (3t^2+6t)2\ln t\,dt = 6\underbrace{\int_a^b t^2\ln t\,dt}_{I} + 12\underbrace{\int_a^b t\ln t\,dt}_{II}$$

I:

$$\int_a^b \underbrace{t^2}_{g'} \underbrace{\ln t}_{f} \; dt = \underbrace{\frac{1}{3}t^3}_{g} \underbrace{\ln t}_{f} \Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{\frac{1}{3}t^3}_{g} \underbrace{\frac{1}{t}}_{f'} \; dt = \frac{1}{3}t^3 \ln t \Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{3}t^2 \; dt = \left(\frac{1}{3}t^3 \ln t - \frac{1}{9}t^3\right) \Big|_a^b$$

II:

$$\int_a^b t \ln t \; dt = \frac{1}{2}t^2 \ln t \Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{2}t^2 \frac{1}{t} \, dt = \frac{1}{2}t^2 \ln t \Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{2}t \; dt = \left(\frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2\right) \Big|_a^b$$

Ergibt insgesamt für den Schwerpunkt:

$$S = \frac{\begin{pmatrix} \frac{3}{4}t^4 + 2t^3 \Big|_a^b \\ 12 \cdot \frac{2}{7}\sqrt{t^7} + 24 \cdot \frac{2}{5}\sqrt{t^5} \Big|_a^b \\ 6\left(\ln t \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{9}t^3 \Big|_a^b\right) + 12\left(\ln t \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^2 \Big|_a^b\right) \end{pmatrix}}{(t^3 + 3t^2)\Big|_a^b}$$

Aufgabe 3.

Felix Baumgartner plant seinen nächsten Sprung von der ISS. Zur Flugzeitoptimierung untersucht er die Kurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t^n \\ t^{\frac{3n}{2}} \\ 3t^n \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit noch festzulegendem $n \in \mathbb{N}$. Die Kurve beschreibt den Verlauf des Sprunges für $0 < t < 1$. Felix möchte eine Flugbahn mit möglichst geringer Länge finden.

a) Verifizieren Sie, dass die Punkte $\mathbf{r}(0)$ und $\mathbf{r}(1)$ unabhängig von n sind (Felix möchte auf jeden Fall am selben Punkt abspringen und ankommen).

b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\mathbf{r}(t)$ zwischen $\mathbf{r}(0)$ und $\mathbf{r}(1)$.

c) Welches n sollte Felix wählen, damit die Flugbahn möglichst kurz ist? Berechnen Sie auch den euklidischen Abstand zwischen $\mathbf{r}(0)$ und $\mathbf{r}(1)$.

Hinweis für b): Um das im Laufe der Rechnung auftretende Integral für die Bogenlänge berechnen zu können, heben Sie $t^{n-1} = \sqrt{t^{2n-2}}$ aus der Wurzel heraus.

LÖSUNG

a)

$$\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 0^n \\ 0^{\frac{3n}{2}} \\ 2 \cdot 0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}(1) = \begin{pmatrix} 1^n \\ 1^{\frac{3n}{2}} \\ 2 \cdot 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Zunächst berechnen wir $|\mathbf{r}'(t)|$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \begin{pmatrix} nt^{n-1} \\ \frac{3n}{2} t^{\frac{3n}{2}-1} \\ 3nt^{n-1} \end{pmatrix} \\
|\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)} = \sqrt{n^2 t^{2n-2} + \frac{9}{4} n^2 t^{3n-2} + 9n^2 t^{2n-2}} = nt^{n-1} \sqrt{10 + \frac{9}{4} t^n}
\end{aligned}$$

Dann lautet die Bogenlänge wie folgt:

$$\begin{aligned}
\int ds &= \int_0^1 |\mathbf{r}'(t)| \, dt = \int_0^1 nt^{n-1} \sqrt{10 + \frac{9}{4} t^n} \, dt \\
&= \left| \begin{matrix} u & = & 10 + \frac{9}{4} t^n \\ du & = & \frac{9}{4} nt^{n-1} dt \end{matrix} \right| = \int_{u_0}^{u_1} nt^{n-1} \sqrt{u} \frac{du}{\frac{9}{4} nt^{n-1}} = \frac{4}{9} \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{u} \, du \\
&= \frac{4}{9} \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{u_0}^{u_1} = \frac{8}{27} \left(10 + \frac{9}{4} t^n \right)^{3/2} \Bigg|_{t=0}^{1} = \frac{343}{27} - \frac{80\sqrt{10}}{27}
\end{aligned}$$

c) Da die Bogenlänge nicht von n abhängt, ist die Wahl von n nicht relevant. Der euklidische Abstand der Punkte $|\mathbf{r}(1) - \mathbf{r}(0)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11} \approx 3.32$ ist um einiges kürzer als $\frac{343}{27} \approx 12.70$. Felix' Analyseansatz ist also generell nicht gut geeignet, die kürzeste Strecke zwischen Anfangs- und Endpunkt seines Sprunges zu finden.