

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

1. Haupttest (14. Dezember 2012)

Gruppe bunt (*mit Lösung*)

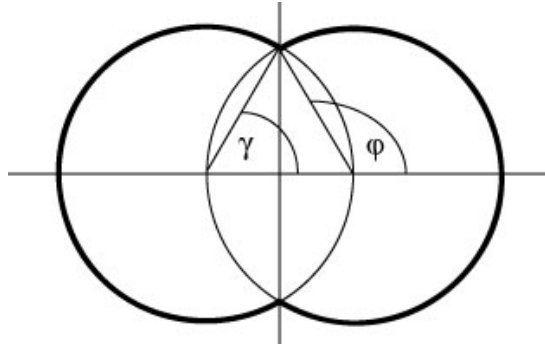
| | | |
|-----------------------|------------------|---------------------------|
| | | |
| ↑ FAMILIENNAME | ↑ Vorname | ↑ Studium / MatrNr |

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

| | | |
|--------------------|-----|-----|
| | | |
| (1) | (2) | (3) |
| Σ (max. 30) | | |

Aufgabe 1.

- a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der gegen den Uhrzeigersinn laufenden Kurve $r(t)$, die im Bild durch die dicke Linie angegeben ist. Dabei sei der Radius beider Kreise gleich $r = 2$, sowie die Mittelpunkte gleich $M_1 = (1, 0)$ und $M_2 = (-1, 0)$. (Achten Sie darauf, dass eines der Intervalle verschoben werden muss, falls die Parameterintervalle sich überschneiden.)



Hinweis: Beachten Sie, dass γ ein Winkel in einem gleichseitigen Dreieck ist und $\varphi = \pi - \gamma$, sowie $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

- b) Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $F = \nabla T$ mit

$$T(x, y) = 2x + x^2y$$

entlang der Strecke von $a = (0, 1)$ nach $b = (5, -2)$.

- c) Berechnen Sie

$$\int \sin x \cos x \, dx$$

sowohl mit partieller Integration als auch mit der Substitutionsmethode der Integration. Argumentieren Sie anhand des Ergebnisses, warum in diesem Spezialfall beide Methoden funktionieren.

LÖSUNG

- a) $K_1 = (2 \cos \varphi + 1, 2 \sin \varphi)$, $\varphi \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$
 $K_2 = (2 \cos \gamma - 1, 2 \sin \gamma)$, $\gamma \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$

Die Intervalle von φ und γ überschneiden sich noch. Verschieben des zweiten Intervalls um $\frac{\pi}{3}$ ergibt

$$r(t) = \begin{cases} (2 \cos t + 1, 2 \sin t), & t \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \\ \left(2 \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) - 1, 2 \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right), & t \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}\right) \end{cases}.$$

- b) Da es sich bei F um ein Gradientenfeld handelt ist das Kurvenintegral

$$\int_C F dr = T(b) - T(a) = 2 \cdot 5 + 5^2(-2) = 10 - 50 = -40.$$

Die direkte Berechnung des Kurvenintegrals ist etwas komplexer.

Aufstellen einer Parameterdarstellung des Weges: $r(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in (0, 1)$

$$F = \nabla T = (2 + 2xy, x^2)$$

$$\begin{aligned} \int_C F dr &= \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2 + 2(5t)(1 - 3t) \\ (5t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^1 (10 + 50t(1 - 3t) - 3(5t)^2) dt = \int_0^1 (10 + 50t - 150t^2 - 75t^2) dt = \\ &= \int_0^1 (10 + 50t - 225t^2) dt = 10t + 25t^2 - 75t^3 \Big|_0^1 = 10 + 25 - 75 = -40. \end{aligned}$$

c) Mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\sin x}_u \underbrace{\cos x}_{v'} dx &= \underbrace{\sin x}_u \underbrace{\sin x}_v - \int \underbrace{\cos x}_{u'} \underbrace{\sin x}_v dx \\ 2 \int \sin x \cos x dx &= \sin x \sin x \\ \int \sin x \cos x dx &= \frac{1}{2} \sin^2 x. \end{aligned}$$

Mit Substitutionsmethode:

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{array} \right| = \int u \cos x \frac{du}{\cos x} \\ &= \int u du = \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2} \sin^2 x. \end{aligned}$$

Es funktionieren beide Integrationsmethoden, da sich die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x$ ebenfalls sowohl mit Kettenregel (als Potenz) als auch mit Produktregel (als Produkt) ableiten lässt. Kettenregel:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x \\ F(x) &= \frac{1}{2} u(x)^2 \\ F'(x) &= \frac{1}{2} 2u(x)u'(x) = \sin x \cos x \end{aligned}$$

Produktregel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ g(x) &= \sin x \\ F(x) &= \frac{1}{2} f(x)g(x) \\ F'(x) &= \frac{1}{2} (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) = \frac{1}{2} (\cos x \sin x + \sin x \cos x) \\ &= \sin x \cos x \end{aligned}$$

Aufgabe 2.

a) Berechnen Sie

$$\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

wobei $C = \{r(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

Begründen Sie aufgrund des Ergebnisses, ob das verwendete Vektorfeld ein Gradientenfeld ist.

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt S des Drahtstückes mit der Parameterdarstellung $r(t) = (t, 4\sqrt{t}, 2 \ln t)$ $a \leq t \leq b$ und der Massendichte $\rho(x, y, z) = \frac{1}{8}xy^2$ in Abhängigkeit von a und b . (Sie müssen nach Berechnung des Integrals nicht die Grenzen explizit einsetzen; es reicht, wenn Sie nach dem unbestimmten Integral $\Big|_a^b$ schreiben.)

Hinweis: $S = \frac{\int_a^b \rho(r(t)) |r'(t)| r(t) dt}{\int_a^b \rho(r(t)) |r'(t)| dt}$. Beachten Sie außerdem, dass $|r'(t)|^2$ ein vollständiges Quadrat ergibt.

LÖSUNG

a)

$$\begin{aligned} \int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy &= \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 t + \cos^2 t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

Das Vektorfeld ist kein Gradientenfeld, da das Integral über eine geschlossene Kurve nicht null ist.

b) $r'(t) = (1, 2\frac{1}{\sqrt{t}}, 2\frac{1}{t})$, $|r'(t)|^2 = 1 + \frac{4}{t} + \frac{4}{t^2} = (1 + \frac{2}{t})^2$, $|r'(t)| = (1 + \frac{2}{t})$

Berechnung des Nenners:

$$\int_a^b \left(1 + \frac{2}{t}\right) 2t^2 dt = \int_a^b (2t^2 + 4t) dt = \left(\frac{2}{3}t^3 + 2t^2\right) \Big|_a^b$$

Berechnung der einzelnen Komponenten des Zählers:

$$x = \int_a^b (2t^2 + 4t)t dt = \int_a^b (2t^3 + 4t^2) dt = \left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{4}{3}t^3\right) \Big|_a^b$$

$$y = \int_a^b (2t^2 + 4t)4\sqrt{t} dt = \int_a^b (8\sqrt{t^5} + 16\sqrt{t^3}) dt = \left(8 \cdot \frac{2}{7}\sqrt{t^7} + 16 \cdot \frac{2}{5}\sqrt{t^5}\right) \Big|_a^b.$$

$$z = \int_a^b (2t^2 + 4t)2 \ln t dt = 4 \underbrace{\int_a^b t^2 \ln t dt}_I + 8 \underbrace{\int_a^b t \ln t dt}_{II}$$

I:

$$\int_a^b \underbrace{t^2}_{g'} \underbrace{\ln t}_f dt = \underbrace{\frac{1}{3}t^3}_g \underbrace{\ln t}_f \Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{\frac{1}{t}}_{f'} \underbrace{\frac{1}{3}t^3}_g dt = \frac{1}{3}t^3 \ln t \Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{3}t^2 dt = \left(\frac{1}{3}t^3 \ln t - \frac{1}{9}t^3 \right) \Big|_a^b$$

II:

$$\int_a^b t \ln t dt = \frac{1}{2}t^2 \ln t \Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{t} \frac{1}{2}t^2 dt = \frac{1}{2}t^2 \ln t \Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{2}t dt = \left(\frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2 \right) \Big|_a^b$$

Ergibt insgesamt für den Schwerpunkt:

$$S = \frac{\left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}t^4 + \frac{4}{3}t^3 \Big|_a^b \\ 8 \cdot \frac{2}{7}\sqrt{t^7} + 16 \cdot \frac{2}{5}\sqrt{t^5} \Big|_a^b \\ 4 \left(\ln t \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{9}t^3 \Big|_a^b \right) + 8 \left(\ln t \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^2 \Big|_a^b \right) \end{array} \right)}{\left(\frac{2}{3}t^3 + 2t^2 \right) \Big|_a^b}$$

Aufgabe 3.

Felix Baumgartner plant seinen nächsten Sprung von der ISS. Zur Flugzeitoptimierung untersucht er die Kurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t^n \\ t^{\frac{3n}{2}} \\ 2t^n \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit noch festzulegendem $n \in \mathbb{N}$. Die Kurve beschreibt den Verlauf des Sprunges für $0 < t < 1$. Felix möchte eine Flugbahn mit möglichst geringer Länge finden.

- Verifizieren Sie, dass die Punkte $\mathbf{r}(0)$ und $\mathbf{r}(1)$ unabhängig von n sind (Felix möchte auf jeden Fall am selben Punkt abspringen und ankommen).
- Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\mathbf{r}(t)$ zwischen $\mathbf{r}(0)$ und $\mathbf{r}(1)$.
- Welches n sollte Felix wählen, damit die Flugbahn möglichst kurz ist? Berechnen Sie auch den euklidischen Abstand zwischen $\mathbf{r}(0)$ und $\mathbf{r}(1)$.

Hinweis für b): Um das im Laufe der Rechnung auftretende Integral für die Bogenlänge berechnen zu können, heben Sie $t^{n-1} = \sqrt{t^{2n-2}}$ aus der Wurzel heraus.

LÖSUNG

a)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= \begin{pmatrix} 0^n \\ 0^{\frac{3n}{2}} \\ 2 \cdot 0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{r}(1) &= \begin{pmatrix} 1^n \\ 1^{\frac{3n}{2}} \\ 2 \cdot 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Zunächst berechnen wir $|\mathbf{r}'(t)|$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \begin{pmatrix} nt^{n-1} \\ \frac{3n}{2}t^{\frac{3n}{2}-1} \\ 2nt^{n-1} \end{pmatrix} \\ |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)} = \sqrt{n^2t^{2n-2} + \frac{9}{4}n^2t^{3n-2} + 4n^2t^{2n-2}} = nt^{n-1} \sqrt{5 + \frac{9}{4}t^n} \end{aligned}$$

Dann lautet die Bogenlänge wie folgt:

$$\begin{aligned} \int ds &= \int_0^1 |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^1 nt^{n-1} \sqrt{5 + \frac{9}{4}t^n} dt \\ &= \left| \begin{array}{l} u = 5 + \frac{9}{4}t^n \\ du = \frac{9}{4}nt^{n-1}dt \end{array} \right| = \int_{u_0}^{u_1} nt^{n-1} \sqrt{u} \frac{du}{\frac{9}{4}nt^{n-1}} = \frac{4}{9} \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{u} du \\ &= \frac{4}{9} \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{u_0}^{u_1} = \frac{8}{27} \left(5 + \frac{9}{4}t^n \right)^{3/2} \Big|_{t=0}^1 = \frac{29\sqrt{29}}{27} - \frac{40\sqrt{5}}{27} \end{aligned}$$

- c) Da die Bogenlänge nicht von n abhängt, ist die Wahl von n nicht relevant. Der euklidische Abstand der Punkte $|\mathbf{r}(1) - \mathbf{r}(0)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \approx 2.45$ ist um einiges kürzer als $\frac{29\sqrt{29}}{27} \approx 5.78$. Felix' Analyseansatz ist also generell nicht gut geeignet, die kürzeste Strecke zwischen Anfangs- und Endpunkt seines Sprunges zu finden.